5

Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas

Nicolas Balacheff
Centre National de Recherche Scientifique. IMAG Grénoble (Francia)

Introducción

Los entornos de aprendizaje informáticos se han desarrollado hasta tal punto que ya no es posible hablar de nuevas tecnologías para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Lo que puede ser nuevo es nuestra toma de conciencia acerca de los problemas que se le ha planteado al profesorado al ejercer su tarea profesional con el ordenador. En concreto, los micromundos matemáticos permiten ofrecer a los estudiantes entornos más relevantes y poderosos para dotar de significado a los conceptos matemáticos. Sin embargo, estos entornos modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe modificarse. El modo en que se evalúa y se da soporte a los estudiantes debe tener en cuenta las características de la tecnología. Analizaré estos aspectos para entender mejor el tipo de soporte que debe prestarse al profesorado, para ayudarle a utilizar eficazmente esta vieja nueva tecnología.

La gran evolución de buena parte de tecnologías informáticas que ha tenido lugar a lo largo de la última década puede describirse, al menos desde el punto de vista de las aplicaciones que conllevan interacciones entre la persona y la máquina, como el desarrollo de una creciente toma de conciencia de la necesidad de un cambio de énfasis desde el procesamiento de la *información* al procesamiento del conocimiento.

La definición inicial de *información*, en el sentido propuesto por Shannon (1981), se basa en una clara separación entre el significado y la forma del mensaje. Como se sabe, la ciencia computacional se ha desarrollado inicialmente a partir del problema del tratamiento automático de la información, es decir, del tratamiento de la forma independientemente del significado. Este dominio recibió incluso el nombre de *informática* en muchas lenguas (*informatique, informatik, informatics*, etc.). El desarrollo de la inteligencia artificial, al principio de los años setenta, condujo a una creciente toma de conciencia de la necesidad de tener en cuenta el significado; en particular, cuando lo que está en juego es la interacción entre las máquinas y los seres humanos. Esta evolución culminó, desde el punto de vista de la educación, cuando quedó claro que la pericia de las máquinas no podía traspasarse a los seres humanos (Clancey, 1983).

Pero la conciencia de la necesidad de tener en cuenta el significado y, como consecuencia, la necesidad de considerar las relaciones entre significado y forma, entre los símbolos y su organización, no ha recibido toda la atención que merecía. Además, todavía existen puntos de vista bastantes ingenuos según los cuales la interacción con un ordenador podría eludir las reglas básicas de la semiótica que sugieren que codificar parte del conocimiento acarrearía, como consecuencia inevitable, la pérdida del significado y la emergencia de significado no intencionado.

Desde estos puntos de vista, una de las *problemáticas* (*problématiques*) dominante de la representación del conocimiento es la fidelidad de los medios usados con relación al conocimiento representado (para un análisis de los diferentes tipos o niveles de fidelidad, véase Wenger, 1987, especialmente pp. 84-85 y 312-314). Esta *problemática* ignora lo que incluso Georges Steiner, un conocido catedrático de literatura en Cambridge, menciona como la *transmutación del conocimiento* cuando éste pasa de un medio a otro, por ejemplo, de un texto a una película. Si esto es así, entonces el tema en cuestión no es la fidelidad sino la capacidad para explicitar de qué forma la nueva representación puede provocar interferencias con el significado intencionado.

Por consiguiente, tanto desde el punto de vista del alumnado como desde el del profesorado, el *conocimiento* es la esencia de la interacción con la máquina. Pero el conocimiento no puede simplemente leerse en la pantalla, es el resultado de una construcción en el proceso de interacción con la máquina. Tanto si la interacción trata este objetivo directamente, como sucedería a lo largo del diálogo presente en una clase magistral, o lo trata indirectamente, como sería el caso de las estrategias de aprendizaje por descubrimiento, la forma en que se resuelve dicha interacción restringe el conocimiento construido por el aprendiz. Ejemplificaré esta dificultad y finalmente propondré que quizás el problema surgido deba analizarse desde el punto de vista de la *modelización.*

A continuación estableceré el contexto de este capítulo a partir de todos estos temas.

Modelización 1: la dimensión experimental de las matemáticas

Los tipos de *software* que han influido notablemente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son las hojas de cálculo, los sistemas de álgebra computacional (CAS) y los micromundos. Mientras que los dos primeros se han importado al mundo de la educación desde sistemas inicialmente dirigidos a usos profesionales, el último ha sido específicamente diseñado para propósitos educativos. Por ello, prestaré mayor atención al caso de los micromundos, especialmente a aquellos dedicados a la geometría.

LOGO es un ejemplo prototipo de micromundo. A partir de unas herramientas sencillas y básicas, el aprendiz puede construir objetos más y más sofisticados y definir herramientas más y más complejas para futuras investigaciones. En cierto modo, el micromundo evoluciona a medida que crece el conocimiento del aprendiz. Esta es una característica clave de los micromundos y una diferencia significativa entre los micromundos y la mayoría de sistemas. Aunque no está dedicado a la geometría, LOGO es el primer ejemplo de un micromundo geométrico; las figuras geométricas se obtienen como si fueran las huellas dejadas por una tortuga mientras se ejecuta un programa expresado en términos de movimientos hacia atrás, hacia adelante y giros sobre la pantalla. Este micromundo requiere que el alumno construya un sólido puente entre las representaciones simbólicas de los objetos geométricos en el lenguaje LOGO y la representación gráfica que se muestra en la pantalla.

Los entornos geométricos dinámicos (DGEs) son micromundos que se diseñaron específicamente para la geometría en los años ochenta. Dos de ellos son particularmente conocidos, Cabri-géomètre (Laborde J. M., 1985) y Geometer Sketchpad (Jackiw, 1991). El principio básico de su diseño es permitir la construcción de figuras geométricas partiendo de objetos básicos (puntos, líneas rectas, segmentos, círculos, etc.) y relaciones (punto medio, perpendicular, paralela, etc.) que el usuario selecciona a partir de un menú. Una vez se ha dibujado la figura, se pueden mover sus puntos básicos y observar sus modificaciones en la pantalla, en la que cada parte del dibujo se mueve de forma continua y diferenciada. Todas las limitaciones que el usuario ha establecido explícitamente se mantienen mientras éste arrastra el punto por la pantalla. Por tanto, se trabaja con mucho más que un dibujo, se trabaja con una categoría de dibujos, cada uno de los cuales es un caso de una misma figura geométrica. Al mismo tiempo, proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una *propiedad geométrica* es un *invariante perceptual*. A medida que los estudiantes aprenden más geometría, tienen la posibilidad de construir herramientas más sofisticadas para la resolución de problemas; por tanto, los DGEs les permiten adaptar el micromundo al especificar las macroconstrucciones. En Cabri-géomètre, por ejemplo, estas macroconstrucciones, que son funciones gráficas, aparecen como nuevos elementos del menú desplegable Construcción.

Al ofrecer la posibilidad de una exploración abierta de las propiedades de las construcciones geométricas, así como de construir sucesivas herramientas cada vez más poderosas y, por otro lado, gracias al *feedback* y al comportamiento que se diseñaron de manera específica para la geometría, este tipo de *software* proporciona un entorno que muy probablemente facilitará el aprendizaje de la geometría. Pero, ¿cómo transforman la vida del profesor? (véase modelización 3).

Tomemos el caso del circumcentro. Usando un DGEs es relativamente fácil producir una construcción y *ver* en la pantalla que las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto, y que el punto de intersección es el centro del círculo que pasa por sus tres vértices. La manipulación directa de los vértices del triángulo demuestra la *solidez* o consistencia del hecho que se ve en la pantalla. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrarlo. Hasta cierto punto, la eficiencia del *software* ha eliminado la necesidad de demostración.

Esta observación no es nueva y se aplica a casi todas las nuevas tecnologías cuando éstas dotan a las matemáticas de instrumentos que parece que proporcionan la respuesta. Las hojas de cálculo hacen cálculos, el sistema CAS proporciona la gráfica de las funciones y sus propiedades básicas y los DGE muestran a través de la simple visualización la validez de afirmaciones geométricas.

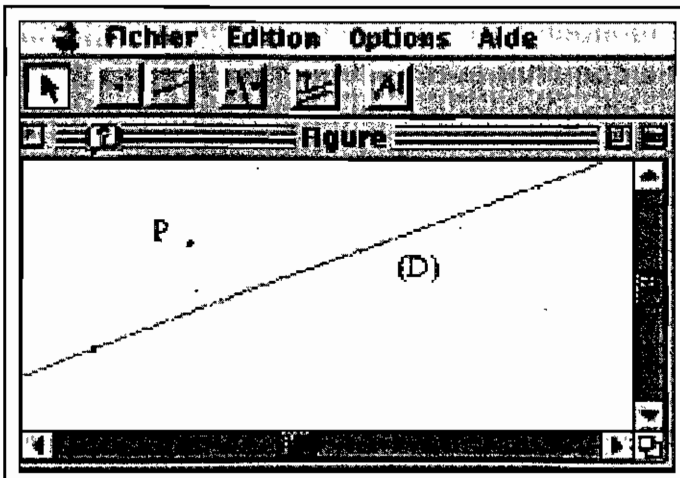
En matemáticas, trasformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de las matemáticas en sí, como muchas veces se ha afirmado. Me gustaría citar, como mínimo, dos tipos de transformaciones:

- Por un lado, la tecnología informática ofrece la posibilidad de tratar problemas y experimentar situaciones que sin ella no serían accesibles para la enseñanza y el aprendizaje.
- Por otro lado, dicha tecnología abre la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de las matemáticas que cambia la naturaleza de su aprendizaje.

El primer tipo de transformación es a menudo enfatizado por los partidarios de innovaciones pedagógicas basadas en la tecnología. Un tema como el de «el círculo de nueve puntos» se puede tratar de nuevo con los DGEs, lo que hace que dentro de las limitaciones del sistema escolar actual, limitaciones de coste *cognitivo* y de tiempo, sea posible construir una figura y explorar sus propiedades y cómo justificarlas, algo que sería del todo imposible en clases con alumnos y alumnas que tuvieran una habilidad media para dibujar las figuras sobre papel. La afirmación de que los entornos informáticos reducen la complejidad de las tareas debido a su poder computacional es un argumento bastante común y generalizado. Sin embargo, es mucho más interesante el caso de los problemas que se pueden proponer en estos entornos pero que apenas podrían considerarse trabajando con lápiz y papel.

Imaginemos una versión personalizada de Cabri-géomètre con un menú que sólo ofreciera las siguientes herramientas: punto, línea y reflexión, y el siguiente problema (cuadro 1).

Cuadro 1



Dado un punto y una línea, construye una línea paralela que pase por el punto dado (personalizar la barra del menú es una de las características básicas de Cabri-géomètre).

Un problema de este tipo resultaría bastante artificial planteado sobre el papel, ya que obligaría al profesor a prohibir arbitrariamente el uso de las herramientas para dibujar directamente la línea paralela con la regla y el compás. Por el contrario, en el entorno DGE el alumno deberá usar las propiedades básicas de la reflexión. Existen muchos ejemplos de este tipo que dan una nueva perspectiva al valor de algunos conceptos geométricos. El concepto de lugar geométrico se ha beneficiado del desarrollo de los DGEs, renovando su interés, al permitir conexiones y su modelización.

Pero estas promesas contrastan con la reticencia del profesorado, reticencia que no puede justificarse únicamente por la falta de *hardware* en las escuelas. Un estudio citado por el INRP en 1992 demuestra que en los países industrializados el 85% de los niños y niñas de 13 años usan calculadoras, pero menos del 10% han aprendido a usarlas con sus profesores. También muestra que sólo el 15% de la enseñanza y el 3% de los ejercicios y problemas han sido diseñados para acomodar estas tecnologías tan expandidas.

No tengo datos parecidos referentes al uso del ordenador, pero todos podemos imaginar lo que ocurre con el ordenador; es suficiente un rápido vistazo a la evolución de los libros de texto y al modo en que incorporan las calculadoras o el ordenador.

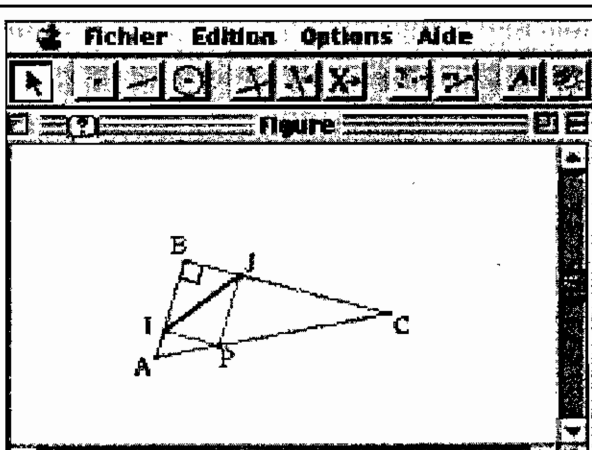
Tal y como Cuban analizó en su clásico estudio del uso de la tecnología en las aulas, los profesores

> *[...] o bien se resistirán o se sentirán indiferentes a cambios que consideran irrelevantes para su práctica, que incrementan su carga sin aportar beneficios al aprendizaje de sus alumnos o que debiliten su control de la clase.* (Cuban, 1986, p. 71)

A menudo se dice que el *software* educativo, al igual que todas las tecnologías educativas avanzadas, incluyendo las calculadoras de bolsillo, abre paso a un enfoque experimental a la resolución de problemas matemáticos.

Con un DGE se puede explorar el caso del cuadrilátero en el que las mediatrices de los lados se cortan en un punto, o el siguiente problema (véase cuadro 2).

Cuadro 2



Sea un punto *P* en el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo, siendo *i* y *j* las perpendiculares desde *P* a los dos catetos del triángulo. ¿Para qué posición de *P* la suma de las longitudes de *i* y *j* es mínima?

Usando Cabri-géomètre o Geometer Sketchpad, la posición de *P* que satisface la condición se halla en un intervalo. Aun suponiendo que los alumnos usen la máxima precisión de medida, en Cabri-géomètre no podrían estar seguros de lo que obtienen puesto que el punto *P* se mueve como mínimo pixel a pixel. En este caso, estos entornos sugieren una conjetura que debe establecerse por otros medios que no sean la simple observación de la pantalla; por tanto, existen problemas que probablemente empujarán a los alumnos a ir más allá de la experimentación y de la observación, a pesar de mi comentario anterior.

Pero experimentar significa organizar un campo experimental y sus relaciones con los objetos matemáticos en cuestión. Por ejemplo, en los casos citados anteriormente, los estudiantes deben tener en cuenta las propiedades de la pantalla del ordenador (conjunto de pixeles) y su interacción con el movimiento de arrastre del ratón (no es fácil controlar el movimiento preciso de un punto en la pantalla). Al igual que en otras ciencias experimentales, la relación entre el campo experimental y su homólogo conceptual o teórico no viene dada, debe conceptualizarse. Aceptamos así la *problemática de la modelización.*

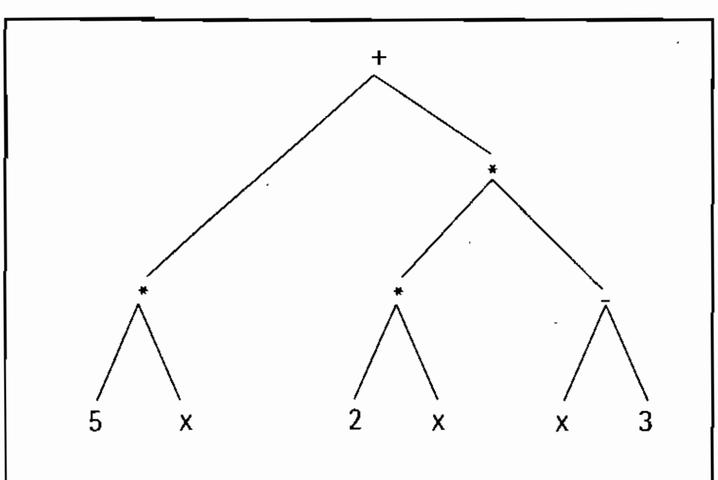
La cuestión a la que puede llegarse en este punto es conocer qué parte de esta conceptualización está específicamente relacionada con el entorno informático; esta cuestión será abordada en el siguiente apartado.

Modelización 2: la fidelidad imposible

Para resaltar la importancia del problema surgido cuando se presenta la necesidad de elegir, y en la propia elección, tomaré un ejemplo relacionado con un aspecto básico de la representación del conocimiento en la ciencia computacional.

Consideremos expresiones algebraicas como las que manipulamos en el álgebra elemental. Estas expresiones pueden percibirse como series de caracteres, $5x + 2x(x-3)$, o como una estructura de árbol (véase cuadro 3). Escoger una representación entre las posibles determina el tipo de manipulación posible en el *interface* del sistema. Si se escoge la estructura de árbol (como se hace, por ejemplo, en el entorno de aprendizaje APLUSIX; Nicaud, 1989) algunas manipulaciones no serán posibles. Por ejemplo, un usuario no puede extraer $5x + 2x$ de $5x + 2x(x-3)$ puesto que no puede encontrarse ninguna manipulación de subárbol que lo explique. Por otro lado, escoger una estructura de lista (como se hace en el entorno de aprendizaje PIXIE; Sleeman, 1982) permite este tipo de manipulaciones y, por tanto, ofrece la

Cuadro 3



posibilidad de tener en cuenta los éxitos y fracasos de un alumno en lo que a manipulaciones algebraicas básicas se refiere, como por ejemplo, la siguiente transformación: $5x + 2x(x-3) \rightarrow 7x(x-3)$.

Como reacción a lo que podrían considerarse limitaciones técnicas, a veces se sugieren otras prácticas, para que los efectos citados dejen de existir. Pero estas sugerencias olvidan que otras prácticas causarían otros efectos *secundarios* o no intencionados. A menudo se sugiere que las representaciones múltiples serían una posible solución para este tipo de problema, pero esto presupone que pueden enumerarse y describirse exhaustivamente las representaciones relativas a una parte dada de conocimiento. Un rápido vistazo a la historia del conocimiento humano, incluso limitándose a la ciencia o a las distintas representaciones que marcan el desarrollo de los alumnos, puede convencer a cualquiera de que tal empresa está condenada al fracaso.

La cuestión no es evitar completamente todos los posibles efectos secundarios, ya que toda representación tiene efectos productivos; se trata de ser capaz de describir en qué consisten con el máximo detalle. De hecho, sugeriría que en primer lugar la representación no debe evaluarse *in abstracto* sino comparándola con su propósito intencionado. En los casos anteriormente citados, hay que tener en cuenta que PIXIE se centra en el diagnóstico de reglas mal formadas en la manipulación elemental de fórmulas algebraicas, mientras que APLUSIX se centra en problemas de factorización.

La literatura sobre la tecnología nos muestra que el problema de la relación entre una representación y lo que representa a menudo se plantea en términos de *fidelidad*. Esto podría proceder de las investigaciones sobre el diseño de entornos para entrenar comportamientos:

> *Para poder comprender y aprender el dominio, el estudiante necesitaría una representación altamente realista del aparato o del entorno y de técnicas igualmente realistas para interaccionar con esta* interface. *Esta creencia ha llevado al desarrollo de simuladores de vuelo y de sistemas de entrenamiento de mantenimiento que están basados en aparatos del mundo real y que aportan al estudiante experiencias directas tanto con los aparatos como con el problema del dominio en que se usan.* (Miller, 1988, p. 175)

La investigación en esta dirección ha llevado al desarrollo de *interfaces* que permiten simular conceptos abstractos como velocidad, energía o vectores para hacer posible su *manipulación directa.*

De hecho, se necesita algo de fidelidad. Nadie esperaría ver un círculo que no tuviera forma de círculo. En cierto modo, podríamos parafrasear a Bresenham (1988, p. 348) diciendo que todo entorno informático debe cumplir el principio WYSIWYE (WhatYouSeeIsWhatYouExpect): lo que ves es lo que esperas ver. Pero el problema es mucho más complicado porque está relacionado con la complejidad y con la especificidad del ordenador como medio. Para clarificar esto, daré algunos ejemplos de geometría.

Volvamos a Cabri-géomètre. Este *software* permite dibujar un punto *P* en un segmento, sin ninguna otra condición que la de ser uno de los puntos del segmento (la relación básica aquí es la de punto sobre un objeto). Cuando se arrastra en la pantalla un extremo del segmento, *P* también debe moverse, por lo tanto, debe tomarse una decisión en cuanto a su comportamiento. Esta decisión puede tomarse de acuerdo con lo que ocurriría usando lápiz y papel, o podría decidirse escoger al azar un nuevo punto para cada nueva posición de los extremos del segmento. Pero en este caso *P* sorprendentemente *saltaría* de lugar a lugar. Podría preferirse que *P*, al igual que los demás puntos, siguiera una trayectoria continua. En el caso de la mayoría de DGEs, esto se obtiene obligando que *P* divida el segmento siempre según la misma razón. La consecuencia es que *P* deja de ser un punto cualquiera del segmento: cuando un extremo del segmento se mueve manteniéndose sobre una línea dada, la trayectoria de *P* es una línea homotética... Aunque es un invariante perceptual, esta propiedad no debe considerarse una propiedad geométrica ya que es el resultado de una elección arbitraria en el proceso computacional.

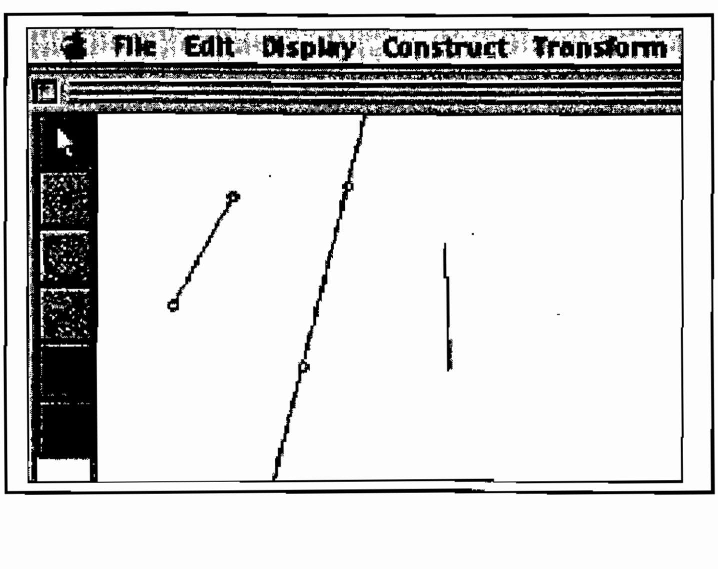
La decisión tomada por los diseñadores de los DGEs podría ser objeto de una discusión interminable; sin embargo, en todos los casos, *es preciso* tomar este tipo de decisiones. Y sea cual sea la decisión tomada nos corresponde a nosotros, como educadores en matemáticas, caracterizar sus efectos y sus posibles consecuencias.

Llamaremos *transposición computacional* (Balacheff, 1993) al proceso que conduce a la especificación y posterior puesta en práctica de un modelo de conocimiento. La transposición computacional se refiere al trabajo necesario para cumplir los requisitos de la representación simbólica y de la computación. Dado que no es posible encontrar una solución que evite una desviación entre las representaciones y lo que intentan representar, estos problemas podrían tratarse cambiando las cuestiones relacionadas con la fidelidad por aspectos relacionados con la delimitación del *dominio epistemológico de validez* de la modelización o de la representación escogida (Balacheff, 1991; Balacheff y Sutherland, 1994).

Si los alumnos deben construir su conocimiento a partir de la interacción con estos entornos, entonces los temas aquí tratados son cruciales. Las características del comportamiento del *software*, incluyendo las no intencionadas, se transformarán, probablemente, en características específicas del significado construido por los estudiantes. Un último ejemplo ilustrará este punto.

En la primera versión del Geometer-Sketchpad, el dibujo de un segmento estaba constituido por un conjunto de tres objetos: una línea y dos puntos. Esta representación ya no se usa en la última versión del *software*, pero puede adivinarse que existió tal representación. En el cuadro 4 se muestra el dibujo de la imagen simétrica de un segmento respecto de un eje de simetría.

Cuadro 4



La imagen del segmento de la derecha no tiene extremos, entonces uno podría plantearse si se trata o no de un segmento. Podrían hacerse estas dos observaciones:

- En primer lugar, para obtener una adecuada representación de un segmento debería haber seleccionado, como saben todos los usuarios del Geometer-Sketchpad, los tres elementos de la representación del segmento de la izquierda del dibujo.
- En segundo lugar, la línea de la derecha —que podríamos llamar segmento abierto— es un objeto del Geometer-Sketchpad ya que puedo usarlo para realizar nuevas acciones, por ejemplo, construir su punto medio.

La cuestión que se plantea ahora, desde un punto de vista cognitivo, es la siguiente: ¿en este entorno, qué será para los alumnos un segmento? El segmento puede tener propiedades bastante distintas a las tradicionales, los extremos, por ejemplo, parecen tener un estatus bastante especial (un segmento esta formado por una línea y dos extremos).

Estas transformaciones de las representaciones de los objetos pueden ser tan profundas que pueden llegar a cambiar la naturaleza de los problemas que abarcan.

Un ejemplo clásico es el de LOGO, para el cual un círculo es una curva de curvatura constante, mientras que en la mayoría de DGEs modernos se define como un conjunto de puntos a una distancia constante de un punto dado. El problema de dibujar tres círculos exteriores tangentes dos a dos no tiene el mismo grado de complejidad en ambos entornos; en LOGO se trata de una cuestión especialmente difícil.

La transposición computacional y el dominio de validez epistemológica están intrínsecamente relacionados. Un tema clave de investigación en la próxima década será entender los procesos relacionados, especialmente sus características intrínsecas (las que no se modificarán con el progreso técnico), y desarrollar marcos teóricos y metodologías para la identificación de un dominio epistemológico de validez.

Modelización 3: el origen de posibles malentendidos en la enseñanza

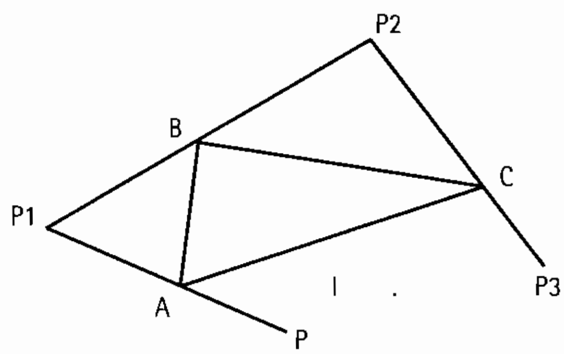
¿Los elementos de la nueva complejidad que acabo de comentar pueden tener efectos importantes sobre la enseñanza? En efecto, los tienen por lo menos en dos sentidos:

- En primer lugar, los entornos informáticos pueden facilitar que el alumnado desarrolle nuevas concepciones acerca de los objetos matemáticos, de maneras que todavía no estamos preparados para afrontar.
- En segundo lugar, plantean al profesorado nuevos problemas en el diagnóstico de la comprensión y la producción de los estudiantes, debido a que para comprender las producciones de *software* es necesario tener una visión de los procesos subyacentes y de las estructuras de conocimiento.

Las dos situaciones siguientes pretenden ejemplificar esta afirmación.

Consideremos el siguiente problema (cuadro 5).

Cuadro 5



Construye un triángulo *ABC*. Construye un punto *P* y su punto simétrico *P1* respecto a *A*. Construye *P2*, el punto simétrico de *P1* respecto a *B* y construye *P3*, el punto simétrico de *P2* respecto a *C*. Mueve *P*, ¿Qué puede decirse de la figura cuando *P3* y *P* coinciden? Construye el punto *I*, de tal forma que sea punto medio del segmento *PP3*. ¿Qué puede decirse del punto *I* cuando *P* se mueve? Explícalo. (De Capponi y Laborde (1995) *Cabri-classe*, hoja 4-10.)

Habiendo construido la figura con Cabri-géomètre, la manipulación directa del punto *P* muestra un hecho obvio: *el punto* I *no se mueve*. Puesto que *I* depende directamente de *P* y *P3*, dos puntos que se mueven cuando *P* se mueve, este *hecho* parece sorprendente. El reto de esta situación consiste en dar una explicación.

Examinemos la interacción entre una profesora y un estudiante, Fabien, sobre este problema (se puede encontrar un análisis más detallado en Balacheff y Soury-Laverge, 1995). Fabien ha observado el hecho pero no tiene ninguna idea de la justificación: «El punto *I* no se mueve, pero ¿ y qué?» Ya que Fabien se ha dado cuenta espontáneamente del paralelogramo *ABCI*, la profesora le anima a centrarse en él, y el alumno demuestra que *ABCI* es un paralelogramo. En esta etapa, desde el punto de vista de la geometría (y de la profesora), el motivo por el cual *I* permanece inmóvil mientras *P* se mueve es obvio. La profesora le proporciona pistas a Fabien:

«¡Oye! ¿Qué significa que cuando *P* se mueve, *I* no se mueve? Te dice que *I* es ¿cómo?» [protocolo 113]

«Has usado muchos puntos intermedios, pero si consideramos la conclusión de que los puntos *P*, *P1*, *P2*, *P3* ya no juegan ningún papel...» [protocolo 117]

«Pero si no se mueve cuando mueves *P* ¿qué te dice? *I*, el punto *I*, me has dicho que se movía de acuerdo con ¿qué puntos?» [protocolo 139]

«Los otros, no se mueven. ¿Ves lo que quiero decir? Entonces ¿cómo podrías definir finalmente el punto *I* sin usar los puntos *P*, *P1*, *P2* y *P3*?» [protocolo 143]

Pero todavía no ve *lo evidente*. Avanzada la interacción, la profesora le explica los motivos matemáticos de la inmovilidad de *I*, produciendo un genuino efecto: ¡Ah!

Para explicar la inmovilidad de *I*, la profesora tuvo que conseguir que el estudiante estableciera un vínculo entre un *mundo mecánico* —el de la *interface* de Cabri-géomètre— y un *mundo teórico* —el de la geometría. Sólo este vínculo puede transformar el *hecho* observado de la *inmovilidad de I* en un *fenómeno*, la propiedad de *invariancia* de *I*. Las intervenciones de la profesora siguieron una actuación sujeta a las limitaciones del contrato didáctico que funcionaron como un requerimiento paradójico: cuanto más precisa era la explicación de la profesora sobre lo que Fabien debía hacer, más se arriesgaba a provocar la desaparición del aprendizaje deseado (Brousseau 1997, p. 66).

Al compartir la pantalla como un campo común de experimentación, el estudiante y el profesor pueden compartir *hechos*, pero no *fenómenos*. En otras palabras, no basta con mirar la pantalla del DGE para ver la geometría de una situación. En cierto modo, la profesora podría haber dicho ¿no lo ves?, sin darse cuenta de que *ver* es *saber*; esto proporciona una visión distinta de la relación entre matemáticas y visualización.

Escuchemos a otro estudiante, Sébastien [protocolo 78-84]:

SÉBASTIEN: Por tanto... He dicho que... Pero no es muy claro... Que cuando, por ejemplo, ponemos *P* a la izquierda, entonces *P3* compensa hacia la derecha. Si sube, entonces el otro baja...

PROFESORA: Entonces...

SÉBASTIEN: Pero no he encontrado ninguna prueba matemática, mm...

PROFESORA: Bien, entonces ¿qué puedes decir acerca de *I*? Que... ¿Por qué *I* es invariante? ¿Por qué no se mueve?

SÉBASTIEN: Esto es exactamente lo que no he encontrado... cómo demostrar que... de hecho *P3*... niega el movimiento de *P*.

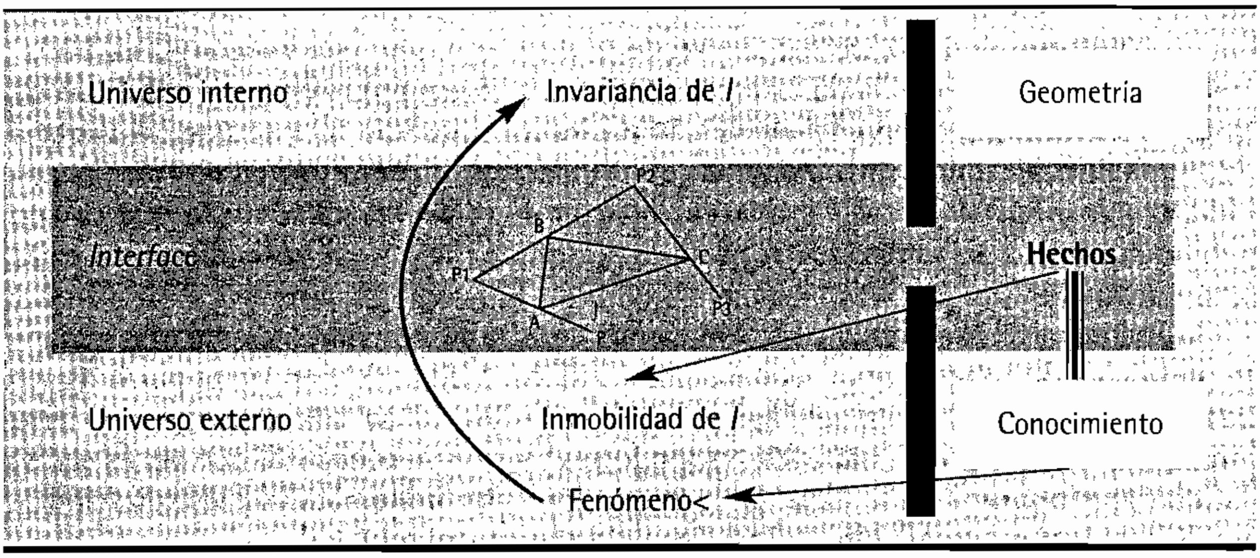
Este fragmento del protocolo de Sébastien nos da más evidencias explícitas de que el paso del mundo mecánico al mundo geométrico no es obvio, aun habiendo percibido la necesidad de establecer dicho paso.

Me atrevo a afirmar que este paso de la pantalla del ordenador a las matemáticas es un *proceso de modelización*.

El ordenador, como máquina física, crea tres universos distintos con una fuerte interacción y entre los cuales es difícil establecer delimitaciones: el universo interno (dentro de la caja), la *interface* y el universo externo, en el que nos hallamos. En el cuadro 6 de la página siguiente se ilustra esta división. Si lo analizamos desde el punto de vista del problema que estamos estudiando, podríamos describir la situación del modo siguiente: la invariancia de *I* es un resultado del modelo geométrico implementado y que le permite mantener la coherencia y las limitaciones de una construcción dada, a la vez que permite la manipulación directa de los objetos libres. El usuario *traduce* dinámicamente esta invariancia debido al hecho de la inmovilidad de I en la *interface*. El usuario debe reconstruir el significado de este hecho a partir del conocimiento que posee, pero este significado no es en absoluto un significado dado.

El tema de la transposición computacional ha revelado el problema de la expresión de un modelo bajo limitaciones computacionales. Este problema aparece de

Cuadro 6



nuevo en relación con los usuarios cuando quieren expresar su conocimiento en el contexto de un determinado *software*. En cierto modo, deben realizar una transposición local de su conocimiento para poder manejar las limitaciones específicas del sistema que usan.

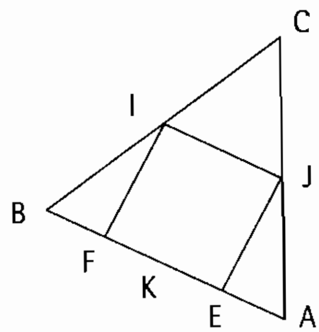
En geometría no existe un único método para producir una construcción geométrica. Consideremos el caso de un triángulo rectángulo; su construcción podría basarse en el hecho de que dos de los lados son perpendiculares; otra construcción podría basarse en el hecho de que un triángulo con un vértice sobre una circunferencia, y cuyo lado opuesto es el diámetro de dicha circunferencia, es un triángulo rectángulo. La manipulación directa de estas dos construcciones se comportará de modos distintos mientras que el dibujo será siempre el mismo (cualquier conjunto de pixeles obtenido de una manera puede obtenerse de la otra). Esta transposición del conocimiento del usuario al medio computerizado, que es un tipo de actividad de modelización, puede ser el origen de dificultades en la comunicación, como se ilustra en el cuadro 7.

Finalmente Fabien y su profesora utilizaron las funciones de Cabri-géomètre que les permiten ver los objetos escondidos para clarificar la construcción. Este último ejemplo es la situación típica con la que se encuentran los profesores cuando, para poder entender el sentido de las producciones de los alumnos, deben tener información acerca del proceso que les ha llevado a realizarlas. La complejidad de este proceso y la gran variedad de posibilidades hacen que esta tarea sea mucho más dura que la de los clásicos entornos de lápiz y papel. Requiere un conocimiento del *software* que va más allá del conocimiento del manual del usuario o incluso de sus especificaciones iniciales.

En un dominio distinto al de la geometría, el de la enseñanza de las fracciones, Ohlsson (1991) nos da un claro ejemplo de una creencia ampliamente compartida por los científicos computacionales y los diseñadores de *software*. Este autor describe un *software* para el aprendizaje de las fracciones que ofrece al estudiante dos ventanas distintas; una de ellas muestra las fracciones (registro matemático) y está asociada a otra

Cuadro 7

Un círculo dibujado usando un punto *O* como centro y pasando por un punto *P* no diferirá a primera vista del dibujo de un círculo definido por un centro *O* y con un radio dado sobre el cual se dibuja un punto *P* (como punto sobre objeto). Volvamos a la interacción entre Fabien y su profesora: El siguiente extracto breve [protocolos 326-343] ilustra bien el tema que quiero plantear:



PROFESORA: Bien. Entonces, tu triángulo ¿será siempre isósceles?

FABIEN: Sí

PROFESORA: ¿hacemos una pequeña comprobación? Espera, este punto [señalando la pantalla]... no puedo moverlo ¿por qué? Se ve que está más o menos bien. Mira, intentaré mover el punto *C*, sólo para ver lo que pasa. ¡Eh! ¿Por qué el punto *B* sigue cuando muevo el punto *C*. ¡Es extraño!

FABIEN: ¿cómo?

PROFESORA: El punto *C*...

FABIEN: ¿sí?

PROFESORA: ... cuando muevo el punto *C*, el punto *B* lo sigue y el punto *A* no se mueve. ¿Cómo lo hiciste?

FABIEN: Sí, porque es un círculo.

PROFESORA: Está en un círculo...

FABIEN: Exacto, *C* es el centro del círculo...

PROFESORA: sí ...

FABIEN: Y *B* y *A* están en el círculo.

PROFESORA: Mm... Bien, ¿has conectado *B* al circulo? ¿cómo lo has hecho?

FABIEN: No, no. *C* es el centro del círculo.

PROFESORA: *C* es el centro, pero ¿y tu punto *B?*

FABIEN: Espera, te lo mostraré.

ventana que muestra un conjunto de ilustraciones relacionadas (el mundo concreto de las particiones). A continuación Ohlsson afirma lo siguiente:

> *[Esta] atrayente característica permitió [al estudiante] obtener* feedback *matemático de sus acciones físicas.* (*ibid.* p. 55)

Pero también indica que, sin embargo, el estudiante podría llegar a una «idea incorrecta» (*ibid.*). Por lo tanto, plantea, entre otras, la siguiente cuestión:

> *¿Por qué construyó el estudiante una idea y no otra? ¿Hubiera sido posible anticipar que este ejercicio llevaría a establecer esta idea concreta?.* (*ibid*)

Estos aspectos son cruciales para que el profesor pueda controlar el aprendizaje. Ohlsson busca una respuesta en la línea de las teorías del aprendizaje, pero yo sugiero que esta complejidad quizás podría entenderse mejor a partir de la observación de las características matemáticas tanto del entorno como de la situación de aprendizaje, ya que las teorías del aprendizaje modernas enfatizan, aunque de formas distintas, la importancia del proceso de adaptación del aprendiz a su entorno. Las características del entorno son, pues, cruciales en la construcción del significado. Por lo tanto, explorarlas desde el punto de vista de las conceptualizaciones que estimulan es tan esencial como explorar los posibles procesos cognitivos del aprendiz. El resultado de los procesos cognitivos del aprendiz depende, en gran medida, de las características del entorno.

Conclusión

Actualmente, la comunidad investigadora está estudiando muchas cuestiones, tanto fundamentales como técnicas, en el campo del diseño y la implementación de entornos informáticos de enseñanza y aprendizaje. Algunas de ellas son ya clásicas, como las modelaciones de los estudiantes, la explicitación del conocimiento, la producción automática de explicaciones, etc. No obstante, hay otras cuestiones que todavía no se están investigando, quizás debido a que en el actual escenario de investigación no existen vínculos sólidos entre los científicos computacionales y los investigadores en educación matemática. Me gustaría finalizar formulando algunas de estas cuestiones.

La introducción del *software* educativo, del tipo que sea, hace que la situación de enseñanza y aprendizaje sea mucho más compleja desde un punto de vista didáctico porque un sistema informático es, ante todo, la materialización de una tecnología simbólica. Esta particularidad juega un papel clave en dos sentidos:

- Por una parte, modificando el objeto de enseñanza como resultado del proceso de transposición computacional.
- Por otro lado, modificando las relaciones que uno puede tener con dichos objetos o el tipo de problema que resulta relevante o de interés.

El profesorado difícilmente será capaz de introducir estas tecnologías en su práctica diaria si no está bien informado sobre todos los aspectos que pueden determinar su lugar y su papel preciso en un proceso didáctico. Afirmaría que los profesores deben conocer los entornos de aprendizaje informáticos desde un punto de vista didáctico.

Un aspecto clave concierne a la posibilidad del profesor de controlar la situación de aprendizaje, al mismo tiempo que da suficiente autonomía al estudiante para que pueda desarrollar un auténtico proceso de aprendizaje. La riqueza y la complejidad del resultado de la interacción entre el aprendiz y la máquina es tal que el profesor difícilmente podrá estar seguro de haber comprendido todas las producciones de los estudiantes. Esta cuestión es especialmente importante en el caso de la tutoría a distancia debido a las limitaciones temporales. Esto hace que sea necesario desarrollar máquinas que sean capaces de interaccionar con el profesor para facilitarle su tarea, concretamente en lo que a la interpretación y la corrección de las producciones de los alumnos se refiere.

Otro aspecto clave que me gustaría destacar es la necesidad de progresar en la formación de profesores para que comprendan mejor las matemáticas del ordenador. Los entornos informáticos plantean una dificultad intrínseca si se les compara con los entornos materiales clásicos, debido a la representación dinámica que exhiben y a su autonomía de acción. Estas características probablemente cambiarán las relaciones entre el aprendiz y su entorno simbólico, pero también las relaciones entre el profesor y su entorno de trabajo. Me atrevo a sugerir que la *modelización* puede ser la palabra clave para encontrar una respuesta. Si es así, deberíamos considerar que esta relación forma parte del contenido matemático que debemos enseñar.

Referencias bibliográficas

BALACHEFF, N. (1991): «Contribution de la Didactique et de l'Épistémologie aux Recherches en EIAO», en BELLISSANT, C. (ed.): *Actes des XIII Journées Francophones sur l'Informatique*. Grenoble. IMAG, pp. 9-38.

BALACHEFF, N. (1993): «La Transposition Informatique. Note sur un Noveau Problème pour la Didactique», en ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C.; TAVIGNOT, P. (eds.): *20 ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

BALACHEFF, N.; SUTHERLAND, R. (1994): «Epistemological Domain of Validity of Microworlds, the Case of Logo and Cabri-géomètre», en LEWIS, R.; MENDELSON, P. (eds.): *Lessons from Learning. Proceedings of the IFIP* WG3 Working Group. A46. Amsterdam. North-Holland/Elsevier B.V., pp. 137-150.

BALACHEFF, N.; SOURY-LAVERGE, S. (1995): «Analyse du Rôle de l'Enseignant dans une Situation de Préceptorat à Distance: TéléCabri», en NOIRFALISE, R. ; PERRIN-GLORIAN, M.J. (eds.): *Actes de la VII Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp. 47-56.

BRESENHAM, J.E. (1988): «Anomalies in Incremental Line Rastering», en EARNSHAW, R.A. (ed.): *Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD*. NATO ASI Series F. 40. Berlín. Springer Verlag, pp. 329-358.

BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht . Kluwer Academic Publishers.

CAPPONI, B.; LABORDE, C. (1995): *Cabri-Classe*. Argenteuil. Editions Archimède.

CLANCEY, W.J. (1983): «The Epistemology of a Rule-based Expert System: A Framework for Explanation». *Artificial Intelligence*, n. 20, pp. 215-251.

CUBAN, L. (1986): *Teachers and Machines*. Nueva York. Teachers College Press.

JACKIW, N. (1991): *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA. Key Curriculum Press.

LABORDE, J.M. (1985): *Projet d'un Cahier Brouillon Informatique de Géométrie*, Rapport Interne LSD (IMAG). Grenoble (también en GUIN, D.; NICAUD, J.F.; PY, D. (eds.): *Environments Interactifs d'Aprentissage avec Ordinateur*. París. Eyrolles, 1995, 41).

MILLER, J.R. (1988): «The Role of Human-Computer Interaction in Intelligence Tutoring Systems», en POLSON, M.C.; RICHARDSON, J.J. (eds.): *Foundations of Intelligent Tutoring Systems.* Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates, pp. 143-189.

NICAUD, J.F. (1989): «APLUSIX: un Système Expert Pédagogique et un Environnement d'Apprentissage dans le Domaine du Raisonnement Algébrique». *Technique et Science Informatique,* n. 8(2), pp. 145-155.

OHLSSON, S. (1991). «Knowledge Requirements for Teaching: the Case of Fractions», en GOODYEART, P. (ed.): *Teaching Knowledge and Intelligent Tutoring.* Norwood, New Jersey. Ablex Publishing Company, pp. 25-59.

SLEEMAN, D.H. (1982): «Inferring (mal) Rules from Pupils' Protocols». *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence.* Orsay, France, pp. 160-164.

WENGER, E. (1987): *Artificial Intelligence and Tutoring Systems.* Los Altos, CA. Morgan Kaufmann Publishers.