

Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela¹

Juan D. Godino ^(a), Francisco Ruiz ^(a), Rafael Roa ^(a), Juan L. Pareja ^(a) y Ángel M. Recio ^(b)

^(a) Universidad de Granada

^(b) Universidad de Córdoba

⁽²⁾

Resumen

El objetivo de este trabajo es aportar información que oriente el uso apropiado de algunos recursos interactivos disponibles en Internet para el estudio de la estadística en la educación primaria y secundaria, identificando las variables sobre las cuales se puede actuar, las consecuencias cognitivas de dichas decisiones y prever conflictos semióticos potenciales. Se formulan algunas hipótesis sobre los efectos positivos del uso de estos recursos, tanto como herramientas de cálculo y graficación que favorecen cambios en el tipo de tareas de análisis de datos, como ayudas para la discusión y amplificación conceptual. Estas mejoras no deben ocultar la complejidad de los objetos matemáticos puestos en juego y los conflictos semióticos potenciales, cuya superación requiere del docente tomar conciencia de ellos y planificar patrones de interacción didáctica apropiados.

1. INTRODUCCIÓN

El número y calidad de recursos disponibles in Internet como ayudas para la enseñanza y aprendizaje de la estadística se va incrementando progresivamente. Para los niveles de educación primaria y secundaria destaca el servidor web del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (<http://illuminations.nctm.org/index2.html>) donde se incluye, para su libre uso, una colección de programas interactivos, planes de lecciones y ejemplos para los distintos bloques de contenido matemático, y en particular para el análisis de datos y probabilidad.

Aunque los diseñadores de estos recursos incorporan sugerencias e indicaciones sobre su uso en las clases de matemáticas consideramos que es necesario estudiar, desde una perspectiva teórica y experimental, las características didácticas de estos recursos y los entornos de aprendizaje que permiten implementar. Es necesario aportar información a los profesores sobre las variables didácticas disponibles en cada recurso, los valores críticos de dichas variables, el tipo de discurso necesario para superar potenciales conflictos semióticos y las consecuencias cognitivas de distintos patrones de interacción entre el docente, los alumnos y el medio instruccional.

En este trabajo realizamos un análisis a priori de dos recursos interactivos disponibles en el sitio web citado del NCTM utilizando las herramientas teóricas del enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática desarrollado en nuestros trabajos previos (Godino, 2002a; Godino, 200b; Godino y Batanero, 1998).

El primero de los “micro-programas interactivos” (MPI) que analizamos proporciona herramientas de cálculo y graficación que amplían el tipo de problemas de análisis de datos abordables en la educación primaria (grados 3 a 5), y como consecuencia los sistemas de prácticas matemáticas que pueden aplicarse. Podemos calificar el segundo micro-programa de “amplificador conceptual”, ya que trata de la comparación de las propiedades de la media y la mediana mediante el uso de la tecnología (grados 6 a 8).

El análisis didáctico integral de un proceso de estudio debe comprender los tres aspectos o dimensiones siguientes:

¹ IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet. Berlin, Germany, 11-12 August, 2003

² Equipo *Edumat-Maestros*, Universidad de Granada. Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación BS2002-02452. (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa de Promoción General del Conocimiento).

- La dimensión epistémica, esto es, la identificación de los tipos de tareas, sistemas de prácticas y objetos emergentes implicados en el uso de los nuevos medios instruccionales (significados institucionales).
- La dimensión instruccional, que comprende la descripción de posibles funciones docentes y discentes, los patrones de interacción, las estrategias para afrontar los conflictos semióticos potenciales, así como la trayectoria mediacional, esto es, la distribución en el tiempo de las distintas opciones de los MPI y de otros recursos complementarios.
- La dimensión cognitiva, esto es la caracterización de los significados personales construidos por los estudiantes respecto de los objetos y procesos matemáticos pretendidos.

En este trabajo vamos a restringirnos al análisis epistémico usando algunas herramientas de la "teoría de las funciones semióticas" (Godino, 2002a; Godino, 2002b). En esta teoría se parte de la identificación de los tipos de objetos matemáticos que se ponen en juego en la realización de tareas matemáticas. Los objetos matemáticos se clasifican en seis categorías: situaciones-problemas; lenguaje; acciones; conceptos-regla; proposiciones y argumentos. Estos objetos pueden ser contemplados desde cinco pares de facetas duales:

institucional- personal; extensivo - intensivo; elemental - sistémico; ostensivo - no ostensivo; expresión - contenido.

Para cada MPI incluiremos una breve descripción del mismo, los objetos matemáticos puestos en juego para los valores críticos de las variables de las tareas, significados institucionales y conflictos semióticos potenciales. En otro trabajo abordaremos las cuestiones relativas a las dimensiones instruccional y cognitiva que plantea el uso de estos nuevos recursos. Comenzamos describiendo el contexto institucional en el que tenemos previsto usar estos microprogramas.

2. FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS SOBRE ESTOCÁSTICA Y EL USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Nuestro propósito es utilizar estos MPI en una experiencia de innovación curricular en la formación de maestros en el uso de las NTIC, con el fin de que conozcan las posibilidades de esta clase de recursos en el estudio del tratamiento de datos en la educación primaria.

En el programa de formación inicial de maestros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se asignan, para el contenido de estocástica, 10 sesiones presenciales (5 de 2 horas y 5 de 1 hora de duración); de estas sesiones, 2 son de prácticas en el aula de informática (una sesión de 2 horas otra de 1 hora). Por tanto, el estudio de la estadística y probabilidad en nuestro programa de formación se realiza en dos escenarios:

- Escenario 1: clase habitual (salón de clase con pizarra, texto y retroproyector). Se utiliza como base el texto de Batanero y Godino (2002) donde se incluyen actividades introductorias y de ampliación. También se sistematizan los conocimientos estadísticos y didácticos pretendidos.
- Escenario 2: clase de informática; manejo individual (o por parejas) de los MPI, con el apoyo del formador. Este escenario se apoya en un Cuaderno de Prácticas en el que se describen los MPI y se proponen cuestiones para la exploración y reflexión del estudiante. Será también necesario preparar una Guía del Formador que oriente en la gestión de este escenario.

El desarrollo y control del proceso de estudio en cada escenario requiere una planificación sistemática que se concreta en la redacción de los correspondientes Manuales de Estudio, los Cuadernos de Prácticas (Taller de Informática, Taller de Manipulativos y Taller Matemático), y las correspondientes Guías del Formador.

El contenido del curso incluye las nociones y técnicas elementales del análisis de datos, situaciones aleatorias y el cálculo de probabilidades de sucesos en casos sencillos. En el "taller de informática" se incluye el uso de un MPI que simula el modelo de urnas, el cual permite explorar las relaciones entre las frecuencias relativas y la probabilidad. Por razones de espacio no analizamos dicho MPI en este trabajo.

Nuestra investigación comprende tres fases o etapas:

- 1) Análisis a priori del sistema de tareas que se puede implementar haciendo uso de los MPI en el escenario 2. Esta información aportará criterios para la redacción del Cuaderno de Prácticas y la Guía del Formador.
- 2) Realización efectiva de la experiencia (implementación de una trayectoria didáctica efectiva).
- 3) Recogida de datos y evaluación de resultados.

En este trabajo presentamos los principales resultados del análisis a priori del sistema de tareas que se pueden proponer, basadas en el uso de los MPI. Estos resultados se usarán para el diseño del escenario 2, y la planificación de la experiencia de enseñanza.

3. RECOGIDA, REPRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN DE DATOS USANDO HOJAS DE CÁLCULO Y GRAFICACIÓN

Este micro-programa interactivo, recomendado para los grados 3 a 5 de educación primaria, junto con su descripción y sugerencias de uso, está disponible en el sitio web:

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.5/index.htm>

3.1. Descripción

Las hojas de cálculo y los programas de graficación son herramientas que permiten organizar, representar y comparar datos estadísticos. Este MPI, junto con los datos incorporados relativos a información meteorológica, permiten introducir a los alumnos en el uso de estos medios tecnológicos, aunque se trata de una versión muy simplificada de una hoja de cálculo. En la primera parte titulada, Recogida y Examen de Datos Meteorológicos, los alumnos organizan y examinan datos que se han recogido previamente en una hoja de cálculo (Figura 1). En la segunda parte titulada, Representación e Interpretación de Datos, se presenta un diagrama de dispersión de pares de variables y un histograma (Figuras 2 y 3).

Spreadsheet		Scatterplot	Barchart		
	April	Precipitation	Low Temp	High Temp	Sky Conditions
Order	1	.3	55	66	Rain
Data	2	0	60	71	Partly Cloudy
By	3	.07	65	69	Over Cast
Date	4	.32	58	64	Rain
Precip	5	0	67	72	Sunny
Low Temp	6	0	68	73	Sunny
High Temp	7	.09	65	70	Over Cast
Sky Cond	8	0	64	71	Partly Cloudy
Mean	0.10	62.75	69.50	Calculate	
Maximum	0.32	68.00	73.00	Clear	
Minimum	0.00	55.00	64.00	Reset	

Close this window

Figura 1: Hoja de cálculo

Como posibles tareas a realizar con este MPI se sugiere que los alumnos recojan datos meteorológicos de su propia ciudad, organizarlos y archivarlos en la hoja de cálculo.

Cuestiones:

- Observa cómo cambia el "resumen de datos" (summary data). ¿Qué te dice el resumen de datos?
- Después de recoger datos de un mes, explorar y elaborar respuestas a cuestiones tales como, ¿Cómo describirías el tiempo en tu ciudad durante Enero a un visitante? ¿Cómo fue la temperatura en este mes? ¿Qué cantidad de lluvia ha habido?

Estas cuestiones se pueden plantear sobre datos correspondientes a distintos meses del año, o para diversos lugares. También se pueden plantear cuestiones similares sobre datos procedentes de bases de datos disponibles en Internet, las cuales se pueden introducir en la hoja de cálculo para su análisis posterior.

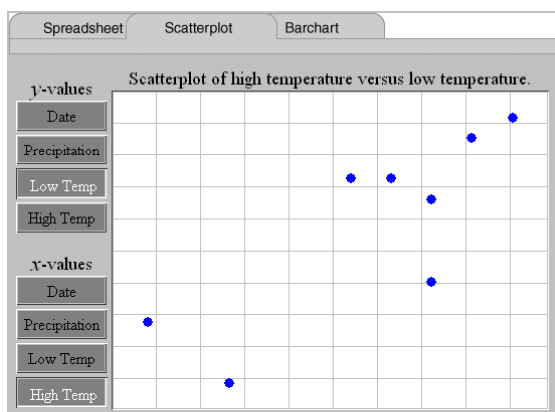


Figura 2: Diagrama de dispersión

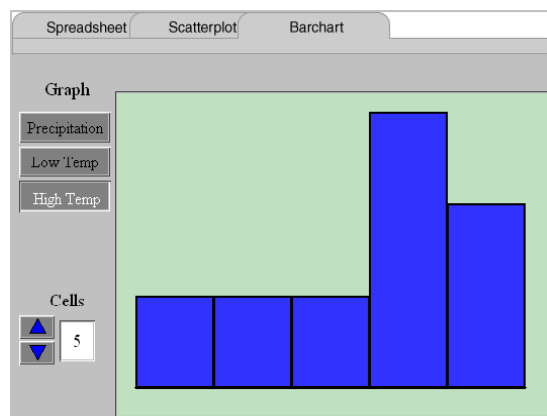


Figura 3: Histograma

3.2. Objetos estadísticos y significados

El problema que nos planteamos consiste en analizar la complejidad ontológica y semiótica de las tareas propuestas y las herramientas de cálculo y graficación implementadas, así como identificar posibles conflictos entre los significados locales y de referencia para los conceptos y técnicas estadísticas puestas en juego. El análisis se realizará mediante las herramientas proporcionadas por la teoría de las funciones semióticas y la ontología matemática asociada (Godino, 2002a).

Situaciones-problemas

El MPI presenta un ejemplo particular de situación de análisis de datos de una muestra de 8 días de una ciudad para los que se ha recogido información de 5 variables atmosféricas: fecha, precipitación, temperatura mínima, temperatura máxima y condiciones del cielo. Para cada serie de datos se calculan de manera automática, la media, el máximo y el mínimo. Así mismo, para un par de variables cuantitativas se presenta un diagrama de dispersión y el diagrama de barras de una de las variables. La situación-problema que se plantea y resuelve es el de la *reducción* (parcial) de cuatro series de datos, numérica y gráficamente.

El análisis de las variables de la tarea permite identificar un campo de problemas de notable generalidad, a pesar de que se incorpora una severa restricción al número de registros que se pueden procesar (9 individuos estadísticos como máximo). Esto limita excesivamente las posibilidades de aplicación práctica del software proporcionado. En realidad se propone el uso de este recurso como una etapa previa al uso de una hoja de cálculo profesional.

El usuario puede cambiar los nombres de las variables (primera fila) y los valores asignados, por lo que es posible plantear problemas de comparación de dos o más muestras mediante la comparación de las medias aritméticas, los valores máximos y mínimos. En el diagrama de dispersión se pueden cambiar los pares de valores representados en los ejes, por lo que pueden plantearse cuestiones relativas a la relación entre las variables numéricas.

Las situaciones de análisis que se pueden proponer a los estudiantes tienen un carácter de análisis multivariante, ya que simultáneamente se representan en la "hoja de cálculo" cinco variables. Esta característica, unida al hecho que se plantea la recogida de datos y su grabación, convierten al MPI en un soporte de actividad estadística genuina y auténtica, al menos potencialmente. Las situaciones que se proponen tienen, por tanto, un cierto nivel de complejidad sistémica.

Este MPI es un medio o soporte que permite el planteamiento de una clase muy vasta de problemas de análisis de datos, ampliando, por tanto, de manera extraordinaria el componente situacional o fenomenológico del significado sistémico de los objetos estadísticos descriptivos. El cálculo del máximo y el mínimo permite usar su diferencia (recorrido) como una medida de la

dispersión de los datos. La circunstancia de que los propios alumnos busquen sus propios datos, sobre un contexto de aplicación que sea de su interés, hace que las situaciones-problemas tengan significado personal para ellos.

Lenguajes

El MPI presenta tres pantallas que responden a las etiquetas de Spreadsheet, Scatterplot y Barchart. Cada una de estas pantallas es un "objeto lingüístico" sistémico, cuyos componentes y reglas interesa analizar para prever los procesos de interpretación que son necesarios realizar para su uso e identificar posibles conflictos semióticos.

Spreadsheet

La disposición tabular de las celdas: la primera fila para la colocación de los nombres de las variables (que se pueden cambiar), las restantes 9 filas son celdas de datos (numéricos o alfabéticos). Cada columna son los valores de las variables: hay una correspondencia semiótica referencial entre la primera celda (y su nombre) y el contenido de las restantes nueve filas. También identificamos una dependencia de tipo sintáctico entre el "nombre" de la variable y la disposición en columna de los valores de la variable, mientras que las filas corresponden a los individuos.

La distinción entre variable estadística y sus valores queda aquí materializada ostensivamente en la disposición tabular. Se tienen aquí ejemplos de variables y de sus valores respectivos; la posibilidad de cambiar los valores y los nombres de la primera fila crea las condiciones para la generalización del concepto de variable y valor (dialéctica extensivos-intensivos).

Los términos "Mean", "Maximum", "Minimum" se corresponden con las filas de valores calculados para cada columna de datos. Hay una doble dependencia "expresión- contenido": a cada vector de datos en cada columna le corresponde como contenido el valor calculado; además esos valores numéricos se califican como correspondientes con la media, máximo y mínimo. No debe pasarnos desapercibido el carácter novedoso de esta manera de expresar, por ejemplo, que la "media de la variable estadística Low Temp es 62.75" (dependencia sintáctica entre las posiciones (términos) "Low Temp." y "Mean" . Sin duda se aplican convenios que el profesor debe mostrar y no cabe suponer que el alumno identifique tales convenios de una manera natural.

Los términos "Mean", "Maximum", "Minimum", permanecen fijos cuando cambian los valores numéricos, lo que indican que están designando tanto a los valores particulares de los estadísticos (extensivos) para cada columna, como también a las entidades conceptuales correspondientes. Hay una dialéctica cognitiva entre ejemplares y tipos.

En el apartado de ordenación de datos, el usuario debe conocer que pulsando cada una de las teclas indicadas se obtiene el resultado de ordenar las columnas de los datos correspondientes de menor a mayor, lo que permitirá identificar el máximo y el mínimo. Las correspondencias que se establecen son entre "Order data by" y cada una de las teclas, así como con las columnas de datos, antes y después de pulsarlas (antes de pulsar pueden no estar ordenados los datos y se ordenan después de pulsar). Con las órdenes "Calculate", "Clear", "Reset" se tiene una situación similar. Se puede decir que se trata de "funciones operatorias", cuyo dominio de valores con los vectores de datos y el recorrido son los estadísticos calculados, o bien el borrado o la restauración de los datos de la aplicación inicial.

Hay que resaltar también el carácter atípico de algunos elementos de esta hoja de cálculo, particularmente la disposición de los comandos de ordenación y cálculo de estadísticos. Se trata de disposiciones y convenios específicos de esta hoja que dejarán de utilizarse en cuanto se pase a utilizar Excell u otra hoja profesional (significados locales que entran en conflicto con otros significados institucionales de referencia).

Hay elementos lingüísticos particulares (extensivos notacional) de esta hoja que representan adecuadamente el tipo de disposición tabular de las hojas de cálculo usadas para la introducción de datos en los programas de cálculo estadístico (filas para los registros; columnas para las variables) (intensivos notacionales). Sin embargo, como hemos indicado, otros elementos notacionales son específicos de esta aplicación particular.

La hoja permite modificar los nombres de las variables (primera fila), con lo cual se puede usar para otros contextos. Sin embargo, las etiquetas de las teclas de ordenación son fijas. Esto puede originar un conflicto semiótico notacional.

Scatterplot

Presenta una cuadrícula de 10x10 en la que se marcan puntos correspondientes a pares de valores (x, y) de dos variables cuantitativas: Date, Precipitation, Low Temp y High Temp. No aparecen marcados los ejes de coordenadas con sus escalas correspondientes, lo que da como resultado una representación atípica. Las explicaciones del programa indican que aproximando el cursor a los puntos aparecen los pares de valores correspondientes.

La selección de los pares de variables a representar se hace mediante un menú de opciones para los "y-values" y los "x-values". Aquí lo que se seleccionan son los pares de variables, y los valores de dichas variables que se representan. Hay que poner en correspondencia la selección de un par de variables con la distribución de puntos en la cuadrícula (dependencia referencial), e interpretar los significados de dicha distribución en términos de asociación entre las variables. Se supone conocida la regla sintáctica de que los "x-values" se disponen en el eje horizontal y los "y-values" en el vertical. Nos parece que la disposición de los "x-values" en el eje vertical puede ocasionar conflictos semióticos.

El recurso permite estudiar de manera dinámica e interactiva 9 pares de relaciones de dependencia estadística; además, puesto que es posible cambiar los datos de la hoja de cálculo, el número de diagramas de dispersión puede ser potencialmente grande y variado. La hoja de cálculo y el diagrama de dispersión cooperan para producir el nuevo objeto "dependencia estocástica entre variables" y su carácter graduable.

Barchart

Permite graficar mediante diagramas de barras (en realidad histogramas ya que se producen agrupaciones de las variables cuantitativas) las variables Precipitation, Low Temp. y High Temp. Se puede cambiar el número de Cells (intervalos de clase) entre 1 y 10 y ver el efecto en las alturas de las barras. Es una representación atípica ya que no aparecen marcados los ejes y escalas, aunque incorpora la posibilidad de leer las coordenadas de los puntos del eje de abscisas y las alturas de las barras aproximando el cursor a dichos puntos. La carencia de ejes y escalas es aquí una regla sintáctica particular, como también la manera de introducir el valor del número de intervalos mediante los pulsadores. En cambio la dependencia entre el objeto "High Temp." y la serie de valores incluidos en la hoja de cálculo es de tipo referencial.

El objeto estadístico que se pretende estudiar aquí es la distribución de frecuencias para variables estadísticas cuantitativas agrupadas en intervalos de clase y su dependencia del criterio de agrupamiento de los datos (intervalos de clase). Mediante la manipulación del número de intervalos se pretende que se identifiquen las propiedades características del histograma.

Tanto para el Barchart como el Scatterplot se puede formular la hipótesis que los niños de primaria necesitan explicaciones complementarias para su manejo e interpretación, ya que incorporan diversos convenios sintácticos, referenciales y operacionales.

Acciones

Se supone que los alumnos realizan la actividad de búsqueda de datos de su propia ciudad y para períodos de tiempo distintos. Esta acción forma parte del diseño general de la situación didáctica, y no es requerida por el MPI, ya que por defecto ofrece una colección de datos para 8 días del mes de Abril. Una vez recogidos los datos se realiza la acción de grabación en las celdas correspondientes. Se trata de una acción regulada ya que hay que introducir en la misma columna los valores correspondientes a cada variable. Las operaciones de calcular los estadísticos, ordenar los datos (¿con qué finalidad), borrar, dibujar un diagrama de dispersión, un diagrama de barras, y restaurar los datos iniciales quedan radicalmente simplificados respecto de las operaciones realizadas con otros medios, en particular con lápiz, papel y calculadora. Los significados locales de dichas acciones/operaciones quedan reducidos a pulsar una tecla y leer el resultado. El esfuerzo se debe centrar ahora en la interpretación de esos resultados. Calcular la media, por ejemplo, es ahora un acto elemental, mientras que si se hace a mano

o con calculadora tiene un cierto nivel de complejidad sistémica: sumar los datos y dividir por el número de sumandos (¿si hay un dato 0 se cuenta?)

La dialéctica "expresión-contenido" (dependencia referencial) también se pone en juego con los objetos actuativos. La acción de pulsar las teclas funciona como antecedente mientras que el resultado de la acción es el consecuente (contenido o significado). Al cambiar los datos de las celdas y pulsar "Calculate" cambian los nueve valores de la matriz escrita en la parte inferior: se entiende que esos números son el resultado de calcular, y que lo que se calcula son los valores de los estadísticos para las cuatro variables estadísticas. Posible conflicto semiótico de naturaleza actuativa: al pulsar "retorno", o bajar a otra celda inferior con el cursor también se van calculando los estadísticos. ¿Son iguales los resultados de estas dos acciones?

Conceptos

Como entidades conceptuales se ponen en juego las siguientes:

Dato, variable, valor, media, máximo, mínimo, ordenación de datos. Tienen aquí un carácter de entidades elementales, unitarias: se suponen conocidas.

La posibilidad de ordenar los datos crea las condiciones para estudiar los conceptos de máximo y mínimo, como el primer y último elemento de la columna correspondiente.

Los conceptos de Spreadsheet, Scatterplot, Barchart quedan aquí ejemplificados como objetos compuestos cuyos componentes principales se pueden mostrar. En el Scatterplot se pone en juego el concepto de asociación estadística para datos cuantitativos, y en el Barchart (histograma en realidad) la distribución de frecuencias para datos agrupados en intervalos.

Propiedades:

- Se supone que la media es un valor representativo de un conjunto de datos y por tanto se puede usar para comparar dos o más muestras.
- El máximo y el mínimo se pueden usar como indicadores del grado de dispersión (recorrido)
- El diagrama de dispersión indica el tipo e intensidad de la relación entre dos variables. Se muestra de manera ostensiva.
- En el histograma se estudia el cambio de la forma del histograma con el número de intervalos. El número de datos tan reducido hace que el agrupamiento sea improcedente. El MPI crea una situación rica de discusión del uso del histograma, y el diagrama de barras.

Argumentos:

El MPI no proporciona ningún tipo de justificación ni explicación de las acciones y resultados que se realizan. Sin embargo, se pueden crear situaciones de validación apoyadas en los resultados proporcionados por el recurso. Por ejemplo, se pueden comparar circunstancias atmosféricas de dos ciudades o períodos y justificar afirmaciones sobre ellas basadas en los resultados del MPI. Se puede argumentar sobre el tipo de relación entre dos pares de variables observando el diagrama de dispersión.

3.3. Valoración e implicaciones

El análisis realizado muestra que el juego de lenguaje organizado entorno a esta hoja de cálculo y los objetos estadísticos correspondientes tiene un carácter sistémico de un cierto nivel de complejidad. Todos los elementos cooperan para producir un nuevo objeto: una hoja de cálculo con unas características locales específicas. Se puede formular la hipótesis de que el manejo de esta hoja y la interpretación de los resultados que se obtienen, en particular las correspondencias semióticas entre los distintos términos y expresiones requiere un proceso de aprendizaje que no estará exento de dificultades para los alumnos de primaria.

Hemos visto que este MPI tiene unas connotaciones particulares cuyo conocimiento requiere invertir un cierto esfuerzo. Además, la restricción a 9 valores como máximo que se puedan introducir es excesiva, lo que impide tratar un número de datos razonable. ¿Sería preferible pasar directamente al

empleo de una hoja de cálculo profesional, aunque fuera posteriormente?. Nuestro análisis arroja la duda de si el empleo de este recurso conlleva un cierto deslizamiento metacognitivo.

Este micro-programa interactivo, con la información proporcionada por nuestro análisis, permite diseñar situaciones didácticas con un alto grado de *validez semiótica*³ para los objetos estadísticos, variable estadística, media y recorrido, relativa al nivel de educación primaria, y en menor grado para la asociación estadística e histograma de frecuencias. Su uso en un proceso de estudio efectivo requiere, sin embargo, la implementación, por parte del profesor, de un discurso explicativo y justificativo que haga posible la generalización de las técnicas y resultados más allá de los ejemplos particulares presentados.

En cuanto al *grado de autonomía* de los alumnos en la realización de las tareas puede ser alto después que el profesor haya logrado comunicar los significados sintácticos y operatorios del dispositivo, y siempre que los alumnos tengan un cierto dominio previo de los conceptos de media, máximo y mínimo de un conjunto de datos.

Consideramos que el análisis ontosemiótico permite tomar conciencia de las posibilidades y limitaciones del recurso interactivo, así como aporta información útil para su diseño o mejora.

4. COMPARACIÓN DE PROPIEDADES DE LA MEDIA Y LA MEDIANA

Este micro-programa interactivo, junto con su descripción y sugerencias de uso, está disponible en el sitio web:

<http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.6/index.htm>

4.1. Descripción del MPI

Mediante el uso de este micro-programa interactivo se pueden explorar y comparar propiedades de la media y la mediana. Cuando se cambian los valores de los datos, inmediatamente se muestra en la pantalla, en un diagrama lineal (Figura 4), las posiciones relativas de la media y mediana del nuevo conjunto de datos.

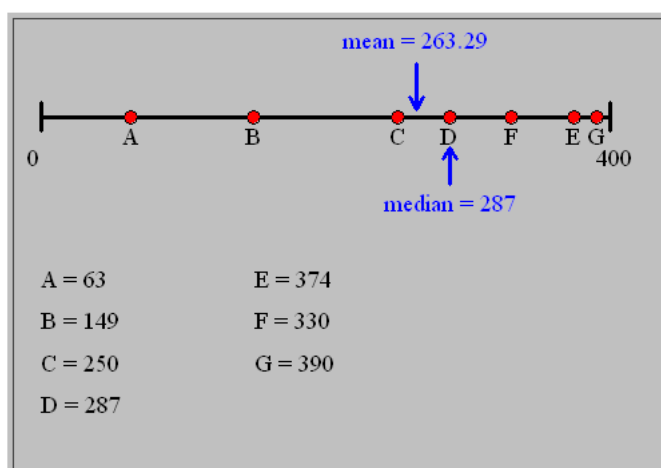


Figura 4: Posiciones relativas de media y mediana

Como contexto que permite atribuir un significado contextual a los datos numéricos representados en la recta numérica se supone que corresponden a las distancias recorridas por un avión de papel al ser lanzado al aire; dichas distancias pueden variar en el intervalo $[0, 400]$. La tarea consiste en explorar cómo afecta a la media y mediana de dicho conjunto de valores cuando se cambia uno o varios de los valores y analizar las características de representatividad de ambos estadísticos.

Algunas cuestiones que se pueden explorar mediante la experimentación:

³ Grado de representatividad del sistema de prácticas previstas basadas en el uso del dispositivo respecto del significado de referencia para los objetos pretendidos y relativo al contexto institucional fijado.

- ¿Se puede encontrar maneras de cambiar los datos de modo que la mediana sea la misma, pero cambie la media?
- ¿Se puede encontrar maneras de cambiar los datos de modo que la media sea la misma, pero cambie la mediana?
- ¿Cómo cambian la media y la mediana cuando se conserva el orden de los puntos pero se cambia sus posiciones sobre la recta?
- ¿Qué ocurre si se cambia alguno de los valores de un extremo a otro?
- Moviendo los puntos, ¿se puede construir conjuntos de datos en los que la media resulte ser un valor típico pero no la mediana? ¿Y viceversa? ¿Para qué conjuntos de datos, si existen, la media no es muy representativa? ¿Cuándo resulta la mediana poco representativa?

4.2. Objetos estadísticos y significados

Situación-problema

La situación consiste en el estudio experimental y dinámico de las propiedades de la media aritmética y la mediana. Aunque no se menciona en la descripción pueden plantearse varios supuestos correspondientes a distintos diseños de avión y determinar cuál es más eficaz. Esto lleva a comparar dos series de lanzamientos. ¿Qué medida de centralización es preferible utilizar la media o la mediana? La decisión de cuál tipo de avión es más efectivo motiva la reducción de los datos y la elección de un valor representante del conjunto.

No se puede cambiar el número de datos, fijado en 7 (número impar), pero sí se pueden cambiar libremente los valores en el intervalo $[0, 400]$. Esto permite proponer distribuciones simétricas o no, con valores atípicos o sin ellos.

La finalidad es estudiar las propiedades de representatividad de la media y la mediana y sus posiciones relativas. ¿En qué tipos de datos es preferible usar la media o la mediana? No es posible tener en cuenta si los datos son medidas ordinales, en cuyo caso la opción es forzosamente usar la mediana. Se puede descubrir que si la distribución de los datos es simétrica ambos estadísticos coinciden.

Las cuestiones planteadas tienen un cierto carácter interno a la matemática, de manipulación numérica, aunque es fácil atribuir un significado fenomenológico externo a los números, como medidas de distancias u otra magnitud. La representación de las medidas sobre la recta ayuda a visualizar las posiciones relativas.

El MPI permite simular fácilmente la obtención de colecciones de datos, su representación en la recta numérica y el cálculo automático de la media y la mediana. Esto puede ayudar a comunicar el carácter funcional de ambos estadísticos y explorar sus propiedades.

Lenguaje

Gráfico de la recta racional en el intervalo $[0, 400]$ sobre la que se marcan 7 puntos designados mediante letras (variables). Las posiciones de los puntos se pueden cambiar desplazándolos sobre la recta, lo que se traduce en cambios en los valores asignados a las variables. Los puntos están ordenados sobre la recta, correspondiendo dicho orden con el alfabético para las letras de las variables.

Los términos media y mediana, son aquí también nombres de variables que pueden tomar diversos valores a medida que se desplazan los puntos. Con frecuencia pasa desapercibido el hecho que "media" (o mediana) designa un valor particular, por ejemplo, 263.29, que ese valor es la imagen que corresponde a una función aplicada a una colección de datos. Por tanto, la media se debe interpretar como una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

En el trabajo estadístico habitual, y en la práctica de la enseñanza, pasa desapercibida la naturaleza funcional de los estadísticos. Al poder cambiar de forma rápida e interactiva los conjuntos de valores /datos, y producir el estadístico, permiten mostrar el carácter de función de M_e y m . Sin embargo, hay que reconocer que se aplica a un vector.

Se supone que la posición de A en la recta se relaciona con el origen y que los números asignados a las letras son las medidas del segmento OA tomando un segmento como unidad. La escritura $A = 63$ es propia de la sintaxis matemática, la manera de asignar un valor a una variable. Una regla sintáctica particular de este gráfico es indicar con flechas las posiciones de la media y mediana.

Acciones

- Cambio de los datos (asignación de valores a las variables) mediante el desplazamiento de los puntos sobre la recta. A cada acción (antecedente, expresión) corresponde un contenido (consecuente, significado) que es el valor numérico correspondiente a la nueva posición del punto sobre la recta y a la nueva asignación de valor a las variables correspondientes. También corresponde otro cambio en el valor asignado a los textos "media" y "mediana". A cada acción elemental corresponde, por tanto, una imagen formada por la terna (dato, media, mediana). Se supone que deberá haber una planificación de un conjunto organizado de acciones (serie de datos) al que corresponderán valores de la media y mediana con una cierta estructura relacional.
- Técnica de representación de números reales en la recta numérica (la unidad de medida no se muestra), tanto porque no es necesario ni posible. Esta técnica aquí es transparente, unitaria.
- Los cálculos de la media y mediana son aquí transparentes (realizados automáticamente por el MPI)

Conceptos

Además de la media y la mediana se pone en juego aquí los siguientes conceptos:

- conjunto de datos; ordenación; representatividad de un estadístico para un conjunto de datos.

La representación de un conjunto de datos por un único valor, como la media, emerge cuando se desean comparar dos o más muestras. Las ventajas relativas de la media y la mediana, en esta función de representación tiene que mostrarse en actividades de comparación. Para ello será necesario diseñar un plan sistemático de selección de colecciones de datos para poder percibir, primero el uso de la representación, y después las ventajas relativas de uno u otro estadístico. Sin embargo, el hecho que en este MPI no se conservan los valores introducidos puede dificultar la apreciación de las cualidades representativas. Este registro habrá que hacerlo de manera manual.

Propiedades

- La media aritmética varía cuando varía al menos uno de los datos.
- La media puede cambiar sustancialmente por efecto de uno o varios valores atípicos.
- La mediana no cambia si varían los datos correspondientes a individuos situados a la derecha o la izquierda del individuo situado en el centro de la distribución.
- La mediana es mejor representante del conjunto de datos si la distribución es asimétrica ya que estará situada en una posición más cercana a la mayor parte de los datos que la media (hace mínima la suma de las distancias en valor absoluto de cada punto a la mediana). Esta preferencia supone aceptar ese criterio como cualidad óptima para la representación.

Argumentos

El tipo de argumentación es visual, empírico: se muestran visualmente los datos y la posición de los estadísticos. Como el número de datos es 7 y se muestran ordenados la mediana puede "calcularla" el usuario de manera inmediata; no así la media aritmética que es calculada por el programa y requiere, por tanto, un cierto acto de fe.

Las propiedades de estos estadísticos no se deducen de las definiciones, sino que se muestran ostensivamente. Esto puede crear obstáculos para comprender la naturaleza deductiva de la demostración matemática, contribuyendo a confundir el contexto de descubrimiento (donde se permite cualquier recurso argumentativo) y el contexto de justificación racional.

4.3. Valoración e implicaciones

El MPI reúne características positivas para apoyar las explicaciones del profesor y estimular la discusión colectiva de las propiedades de la media y mediana; no parece una herramienta de exploración personal: si no se conoce lo que se busca, no parece posible encontrarlo. El aprendizaje del grado de representatividad de los estadísticos requiere el concurso del docente.

La discusión y orientaciones que acompañan al MPI no mencionan el punto crucial del grado de asimetría de la distribución y la presencia de valores atípicos como elemento clave en la decisión de uso de la mediana. En este contexto restringido de análisis de datos la mediana será siempre preferible a la media, o indiferente cuando la distribución es simétrica.

Este MPI proporciona herramientas de cálculo y graficación que apoyan el componente praxémico de los objetos "representación estadística", y las propiedades de la media y mediana. Pero la generalidad de dichas propiedades y la justificación racional de las propiedades (componente discursivo) tienen que ser cuidadosamente implementadas por el docente.

5. REFLEXIONES FINALES

El análisis realizado muestra el nivel de complejidad epistémica que se pone en juego en el uso de estos micro-programas interactivos, evaluada mediante la variedad y tipo de objetos matemáticos que intervienen y las correspondencias semióticas que se establecen entre los mismos (sintácticas, referenciales y operacionales). Estos objetos y conocimientos tienen que ser distribuidos en el tiempo asignado al proceso de estudio en los distintos escenarios en que tiene lugar ese proceso. Los MPI son sin duda potenciadores semióticos, recursos que sirven de soporte a nuevos y más ricos sistemas de prácticas matemáticas y nuevos significados. Pero su gestión e incardinación con los restantes escenarios y recursos didácticos plantea nuevos retos a la labor del profesor. Pensamos que el análisis realizado en esta investigación proporciona información útil para orientar el trabajo del formador de profesores.

Nuestros análisis onto-semióticos pueden ayudar a tomar conciencia de la ilusión de transparencia con la que con frecuencia se aborda el estudio, no sólo del propio saber matemático (en este caso, saber estadístico), sino también el propio saber didáctico. El uso inconsciente de los nuevos recursos tecnológicos, disponibles para la enseñanza de las matemáticas, puede reforzar esa ilusión de transparencia, ocultando aún más la delicada y compleja labor del docente. El uso apropiado de las nuevas tecnologías didácticas requiere cambios nada obvios en las funciones docentes y discentes, así como nuevos patrones de interacción didáctica.

El uso de los MPI facilita la construcción de escenarios de exploración personal de cada alumno. Pero el progreso de esa exploración, apoyada en el uso de programas interactivos, no está exenta de puntos muertos, de bloqueos que requieren el concurso del docente. Esto es con frecuencia un reto para el profesor, quien tiene que ayudar "simultáneamente" a varios estudiantes, que pueden estar en puntos diferentes del proceso de estudio propuesto.

El uso de las NTI en el estudio de las matemáticas introduce cambios radicales en su organización, creando nuevos escenarios que se añaden al tradicional del aula con pizarra y retroproyector (o display). El escenario del laboratorio de informática (alumnos trabajando individualmente o por parejas con un ordenador) cambia de manera radical las trayectorias didácticas. Los cambios se producen, no sólo en las funciones discentes (trabajo de exploración personal), sino también en las docentes y las trayectorias epistémicas.

REFERENCIAS

- Batanero, C. y Godino, J. D. (2002) Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3): (en prensa).
- Godino, J. D. (2002b). Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.